

Colegio

Problemas de la Enseñanza de las Matemáticas

Presentación

Entre las preocupaciones de la investigación educativa, dos merecen especial atención: por un lado, la ineficacia de los métodos de enseñanza utilizados actualmente junto con todos los componentes teóricos asociados a ellos, ineficacia que puede comprobarse por el exceso de alumnos reprobados, el gran número de deserciones y la deficiencia académica con que llegan los alumnos a las escuelas de educación superior; por otro lado, el poco interés por el tipo de contenido cultural y matemático que se enseña, y que se registra por indicadores como la ineficacia académica de los estudiantes y la incapacidad de las personas de mayor nivel cultural para aplicar sus conocimientos de manera concreta y efectiva, como el caso extremo de aquellos ingenieros que han olvidado el álgebra elemental. Ya que el conocimiento de la ciencia y la cultura favorece en el hombre la formación de una conciencia crítica y una inteligencia no-dependiente, es necesario determinar en qué grado la ins-

trucción que proporciona la Universidad es útil para ese fin.

Un auténtico interés por este tipo de problemas ha inquietado a muchos estudiosos, quienes los han enfrentado de manera aislada, sin recursos teóricos y económicos, desde distintos puntos de vista y en diferentes ámbitos y hasta el momento sólo se han obtenido éxitos modestos; pero queda la esperanza de haber dejado caminos abiertos para una planeación más ambiciosa que sitúe los distintos componentes del proceso educativo en los lugares más idóneos y estratégicos que permitan disponer de elementos realmente útiles para la enseñanza, y que favorezcan la creación de un aparato de investigación educativa de gran capacidad y eficiencia.

Dentro del Colegio de Ciencias y Humanidades, este celo se ha manifestado de manera concreta a través de la realización de foros y encuentros culturales, a través de la honda preocupación por unificar los programas de las diferentes áreas, sin menoscabo de la renovación incesante que debe ser característica esencial de un progra-

ma actualizado, y también a través del mejoramiento del personal docente con seminarios de superación académica y el fomento de actividades orientadas a proporcionar apoyo a las tareas cotidianas del maestro y a mejorar los instrumentos de evaluación que permitan disponer de una visión más real del problema.

Dentro de este marco puede verse el siguiente trabajo, que tiene la pretensión de servir de ayuda al proceso de enseñanza de las matemáticas en el bachillerato y proporcionar una crítica racional y coherente de algunos de los factores más relevantes que se manifiestan en los problemas mencionados.

Iniciar una investigación seria sobre cualquier asunto representa una tarea cuyos alcances no es sencillo predecir y cuyas dificultades son imposibles de prever. Normalmente el investigador se encuentra con información desordenada e incoherente, en situaciones en apariencia sin relación alguna con fenómenos sobre los cuales se ignora todo o se guarda una opinión errónea y llena de prejuicios; pero particularmente las dificultades son mayores, si en la investigación no se cuenta con un aparato teórico adecuado. Esta situación de insuficiencia se da especialmente en las investigaciones que la didáctica exige al docente preocupado por conocer y dominar los problemas que su especialidad le presente.

No obstante, una primera alternativa está en buscar el asesoramiento y las conexiones más idóneas al asunto que se desea abordar, opción que seguramente no debe despreciarse por el trabajo y esfuerzo que es posible ahorrar.

El reto que para los profesores autores de este trabajo constituye la problemática educativa

y la responsabilidad que significa su solución, nos inclinó a seguir este camino.

Una primera decisión fue seguir una especialización educativa que alentará el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas; sobre la experiencia que esto constituyó y las impresiones que nos dejó, será conveniente dejar anotaciones que servirán para formarse una idea correcta de cuáles fueron las influencias que precedieron a la investigación que aquí se presenta.

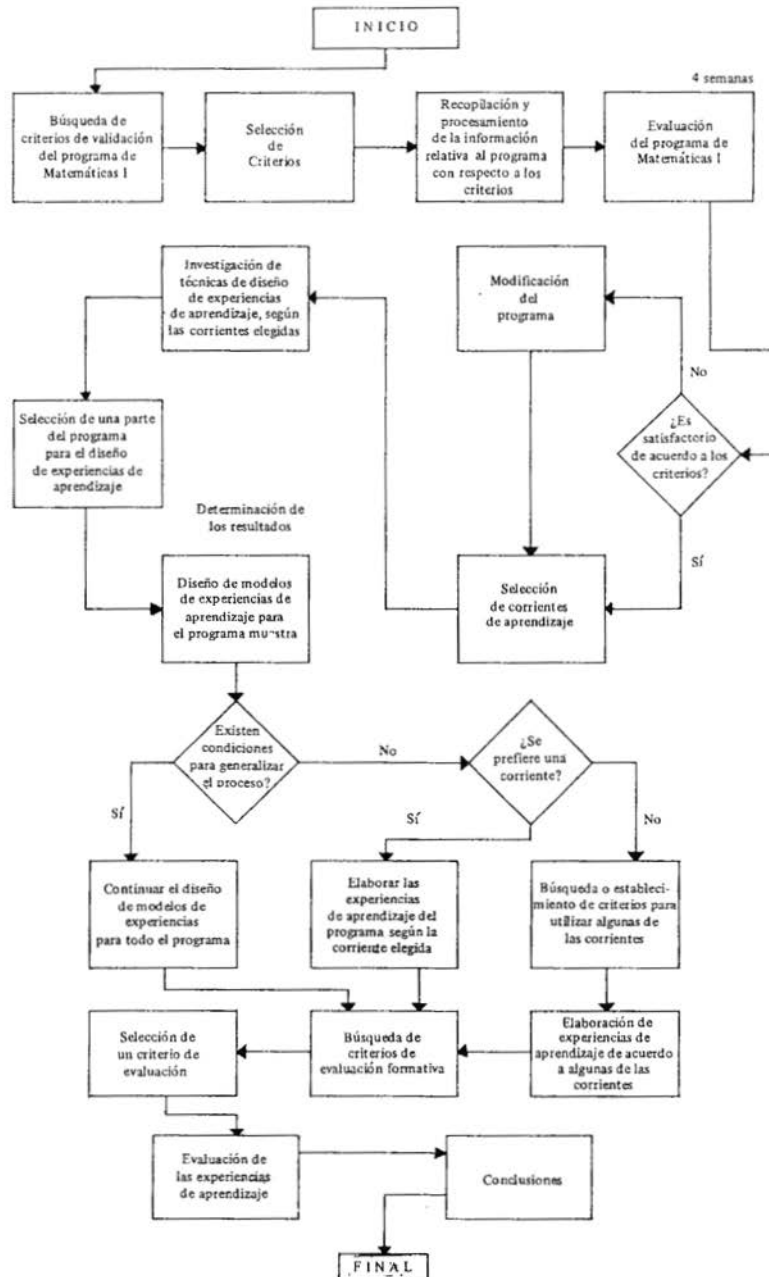
La Maestría en Matemáticas Educativas, aunque englobada en los programas del Politécnico, ha sido avalada por los criterios universitarios, como se ve en el esfuerzo que se ha puesto para que sus egresados puedan disponer de todos los recursos teóricos posibles, tanto en el plano de las teorías del conocimiento, como en el de la psicología y las matemáticas; para nosotros representó la mejor solución para disponer de elementos eficientes y suficientes en la investigación.

Tiempo y esfuerzo ingente fue dedicado al análisis y discusión de los objetivos originales del Área de Matemáticas en el CCH, cuya conexión con los objetivos generales nos pareció obvia. Siguiendo esta línea de pensamiento fue planteada la interrogante sobre la raíz de los problemas: ¿Acaso la ausencia de un currículo general? ¿Quizás la deficiencia pedagógica del personal docente? ¿O la excusa tradicional de los ciclos educativos anteriores? Nuestra opinión se ha afirmado en conceder gran importancia a los factores internos como son la planeación y coherencia de los cursos, la claridad de los objetivos, la diversidad de los apoyos académicos, etc. Sin quitar consideración a los factores externos, como podrían ser las influencias educativas ante-

riores y posteriores al bachillerato y las condiciones sociales, los hemos hecho a un lado para facilitar este estudio.

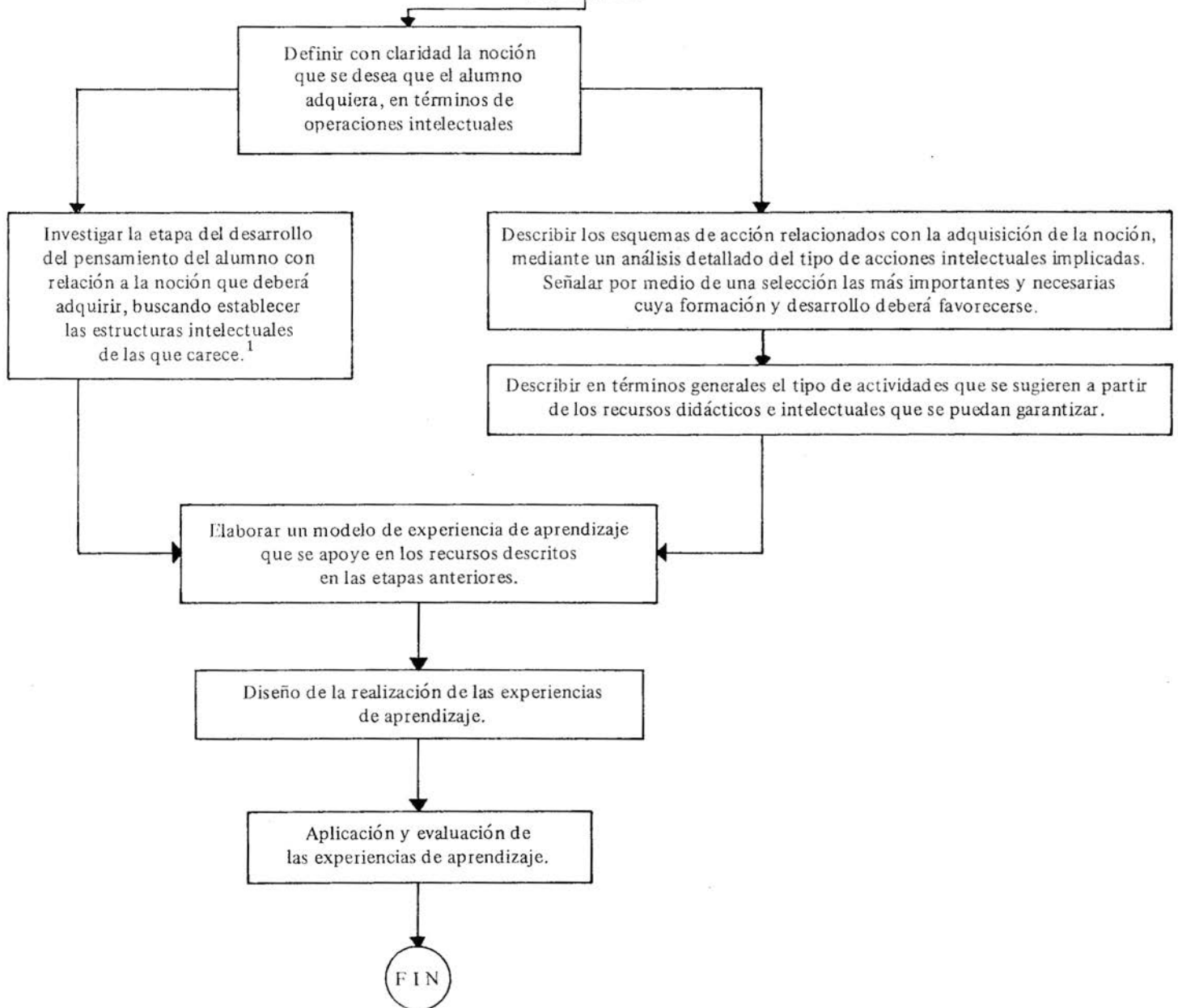
Una ubicación general del trabajo se consigue

con los diagramas siguientes. La ponencia se refiere a una investigación con el propósito de conocer las capacidades deductivas de nuestros estudiantes, cuyo conocimiento sugiere Piaget.



JEAN PIAGET

INICIO



¹ La investigación y las experiencias de aprendizaje intentarán determinar las operaciones intelectuales importantes en el proceso.

Acciones Intelectuales Implícitas en las Nociones que debe Adquirir el Alumno

Para definir las nociones en términos de operaciones, intentaremos aproximarnos a través de las acciones intelectuales implícitas en el uso de los modelos lineales. A continuación describimos las operaciones que consideraremos:

- a) Uso de variables y sustitución de magnitudes numéricas.

Dado que la sustitución es un proceso necesario para verificar la efectividad de los modelos matemáticos, consideramos importante que el alumno tenga ideas claras sobre este asunto. En la experiencia previa del estudiante es posible encontrar multitud de situaciones en las que la idea de sustitución está presente, y dado que por un procedimiento de “tanteos” se pueden resolver problemas, aquél será un proceso útil para el desarrollo intelectual que deseamos para el estudiante.

Así, por ejemplo, si se plantea a un alumno el problema siguiente:

“El país tiene una deuda externa de 80,000 millones de dólares, la tasa de interés anual es de 15 por ciento. ¿Cuánto se deberá juntar para el pago de la deuda, si no deseamos pagar el próximo año por concepto de intereses más de 6,000 millones de dólares?”

El estudiante deberá representarse de alguna manera la cantidad desconocida y efectuar ope-

raciones aritméticas con ella. La operación intelectual de representar mediante símbolos algo inexistente en lo concreto, es fundamental y se forma en el alumno en un proceso largo, pero sugerimos que debe darse la oportunidad al alumno de arribar a la solución por un procedimiento de tanteos y tratar de conseguir por ese camino la interiorización del esquema de acción correspondiente.

- b) Dependencia e independencia de variables.

Existe una relación con el esquema descrito anteriormente del uso de variables, donde en este caso hay dependencia entre ellas.

El alumno deberá descubrir de modo concreto que la modificación de un factor (que llamaremos variable independiente) influye en la modificación de otro (que llamaremos variable dependiente).

En las primeras etapas del desarrollo de este esquema se podrá hacer a un lado la cuantificación explícita de la dependencia estudiada, que deberá conseguirse seguramente de una manera más organizada en conjunción con otros esquemas.

Piaget hace referencia a esta operación, cuando habla del esquema “Siendo constante el resto²”, que permite que en el intelecto infantil puedan controlarse concatenaciones muy complejas de las propiedades de las cosas, al mantener constantes algunos factores que determinan la formación de clases. Al neutralizar el efecto de dichos factores puede estudiar el que él desea.

2 Génesis del pensamiento lógico.

En el pensamiento científico este proceso adquiere el carácter de una operación y se constituye en un instrumento fundamental de la investigación, al hacer uso de la idea “Causa-efecto” como relación posible de estudio y no de asociación real. Sin embargo, el desarrollo intelectual de esta herramienta exige que el estudiante verifique su utilidad, al enfrentarse con situaciones en las que sea evidente la falsedad de la causa-efecto, y al mismo tiempo puedan garantizar las ventajas de su uso.

La matemática desempeña un papel importante en dicho desarrollo, al proporcionar un mecanismo de fácil manejo para manipular las relaciones posibles que se puedan dar entre variables, que va de situaciones tan elementales como sería la relación entre magnitudes directamente proporcionales, hasta situaciones más complejas que la ciencia misma sólo puede resolver suministrando modelos aproximados. El tratamiento concreto con el que tendrá contacto el estudiante puede ilustrarse, si se plantea el siguiente problema de movimiento:

Dos vehículos se mueven en línea recta recorriendo distancias iguales en tiempos iguales; si en 60 minutos se desplazan respectivamente 80 km y 100 km y el primero sale con 20 min. de ventaja.

- i) ¿En qué tiempo alcanza el vehículo más rápido al primero?
- ii) ¿En qué tiempo el vehículo más rápido duplica la distancia recorrida por el primero?

Aquí el alumno deberá analizar las preguntas y verificar que la primera tiene sentido en una si-

tuación real y que la segunda se encuentra fuera de contexto, a pesar de que el modelo algebraico le proporcione una solución. El análisis de situaciones semejantes provocarán en las estructuras intelectuales del estudiante modificaciones que generarán la operación ya mencionada.

- c) Representación geométrica como modelo de dependencia.

La conveniencia de utilizar la representación geométrica como instrumento auxiliar que permite ver las relaciones entre variables de un modo más “concreto”, es familiar al trabajo en el salón de clases. Consideramos que este recurso debe estar ligado a los hábitos de pensamiento del estudiante, de manera que, cuando se le presente un problema, pueda dar una representación geométrica del mismo, y por ese camino su razonamiento resulte más eficiente.

Así, por ejemplo, si se propone al alumno el siguiente problema:

La presión p ejercida por cierto líquido en un punto dado, se encuentra en una relación lineal con la profundidad h , del punto bajo la superficie del líquido. La presión ejercida a una profundidad de 15 metros es de 2.50 kilogramos por centímetro cuadrado, y en la superficie es de un kilogramo por centímetro cuadrado (presión atmosférica) ¿Qué presión ejerce ese líquido a 25 metros?

Una manera de que el alumno comprenda mejor el problema que se le plantea y la forma de resolverlo, es dándole una representación geomé-

trica que le muestre el significado de la relación lineal y le facilite el camino para comprender la solución algebraica.

Este recurso podrá servirle en su desarrollo intelectual posterior y en todo caso es un elemento presente en muchas de las ramas de la matemática: la relación entre esquemas de acción es una de las premisas básicas de la escuela de Piaget y la formación de los esquemas relacionados con la representación geométrica del modelo lineal, necesariamente están ligados con los esquemas para los cuales ésta resulta útil. Podemos usar estas relaciones como los antecedentes del modelo lineal.

Una cuidadosa selección de temas que merecen ser abordados porque aparecen frecuentemente en problemas en los que los modelos lineales son muy útiles, sugiere la necesidad de controlar el marco de referencia, en cuanto a esquemas intelectuales, que será la base para la construcción de operaciones. Dicho control se ejerce a través de actividades en esta etapa que permitan al estudiante el dominio de las operaciones concretas implícitas en los temas propuestos; es decir, experiencias que favorezcan el contacto directo del alumno con la problemática inherente a los conceptos.

La dificultad para el alumno de retener y aplicar eficiente y constructivamente las propiedades de la igualdad puede solucionarse consiguiendo (de acuerdo a la línea fijada por Piaget) que él “construya” el conocimiento a través de la investigación. Normalmente tales propiedades son usadas para encontrar soluciones de ecuaciones que resuelven problemas concretos, pero éstas en el proceso, aparentemente, carecen de significado y sólo representan mecanismos importan-

tes de un método (solución de ecuaciones). Seguramente si el estudiante verifica con situaciones sencillas pero concretas el cumplimiento de dichas propiedades, se estará en el camino de conseguir que las mismas sean una experiencia significativa y por tanto difícilmente olvidadas; además se fomentará, como consecuencia lógica el hábito del razonamiento sistemático implícito en la investigación misma. Salvadas las diferencias, pretendemos conseguir la formación de intelectos críticos y racionales a semejanza del pensamiento científico profesional.

Un Primer Acercamiento al Conocimiento de la Naturaleza del Pensamiento del Alumno

La presencia lógica de este estudio se apoya en la afirmación de Piaget:

“Las estructuras mentales se forman sobre otras ya existentes y en asociación con ellas”,³

puesto que en caso de que el alumno promedio carezca de algunas de estas estructuras básicas, el diseño de las experiencias de aprendizaje deberá atenerse a eso.

El pensamiento del alumno, en relación con el conocimiento de los modelos algebraicos, en particular el modelo lineal, debe apoyarse en nociones generales del método hipotético-deductivo, al menos en su forma más elemental. Esto tiene alguna relación con la presencia del alumno en la etapa de las operaciones formales. Así, el objeti-

3 *Seis estudios de psicología de Jean Piaget.*

vo es investigar la madurez del estudiante para elaborar una hipótesis que le permita dar una respuesta concreta ante una situación dada.

Para poder buscar información sobre la madurez del estudiante promedio para dar una respuesta a un problema dado a partir de una hipótesis, se propuso a la muestra de 100 alumnos el problema de construir una definición de un concepto matemático a partir de datos que se le proporcionaron a través de imágenes en tarjetas. Se les presentaron 20 esquemas en los que están presentes o no propiedades que caracterizan al concepto de función suprayectiva, según es posible describirlo sobre un conjunto finito, y se pide a los alumnos de la muestra la discriminación de las propiedades que caracterizan al concepto. Posteriormente, buscando evaluar la construcción mental lograda por el estudiante, se les mostró otra serie de 10 esquemas que servían para verificar si habían adquirido o no el concepto.

El diseño de los esquemas buscó controlar los factores que parecían más evidentes, como son: tamaño en las tarjetas, color de la tinta con la que se dibujaron las figuras, forma de representación de los conjuntos asociados.

Características de la Muestra

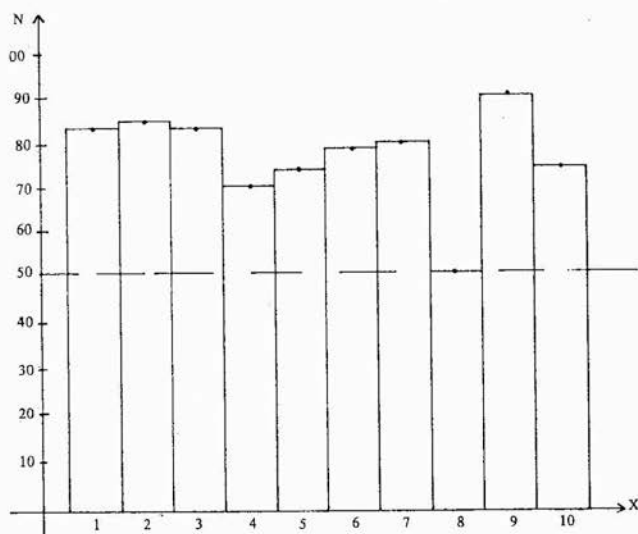
Se consideró conveniente tomar una muestra aleatoria de 100 alumnos que cursaban el primer semestre en el CCH, con el propósito de que fuese representativa de los alumnos de nuevo ingreso. Suponemos que estos no conocen el concepto propuesto. La aleatorización de la muestra se consiguió estratificando la población por turnos y aplicando el muestreo aleatorio simple a cada estrato. Cada uno de los alumnos seleccionados

fue sometido al experimento, el cual consistió en mostrarle las 20 primeras tarjetas, una por una, al mismo tiempo que se le indicaba cuáles de ellas representaban una suprayección y cuales no. El orden en que fueron presentadas las imágenes se aleatorizó. La información se daba haciendo primero una pregunta: ¿La figura representa una suprayección?, y posteriormente rectificando o ratificando su respuesta, según fuese el caso. Con el propósito de favorecer la identificación de factores relevantes, las tarjetas se dejaban a la vista del alumno, separadas de modo que a un lado fueran quedando los esquemas que representaban suprayecciones y en el lado opuesto los otros.

Interpretación de los Datos

Para llevar a cabo la interpretación de los datos, podemos comenzar por rechazar la posibilidad de respuestas dadas al azar, considerando los elementos del examen (cada respuesta a partir de las figuras), como una colección de eventos independientes. Si numeramos las preguntas y consideramos como frecuencia de cada una el número de alumnos que responden de manera acertada, podemos representar con un número x cualquiera de las preguntas según el orden en que fueron presentadas al alumno, y con N el número de alumnos en la muestra que respondieron correctamente a dicha pregunta. Con los datos recabados obtuvimos la siguiente distribución de frecuencias:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	82	83	81	69	73	77	78	50	87	73

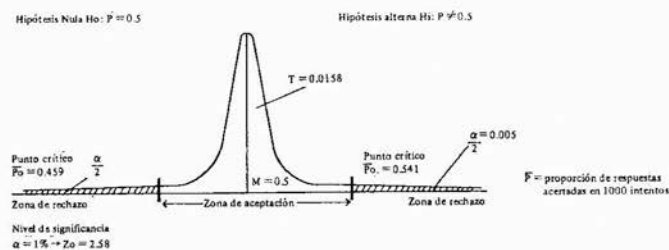


Como puede verse en la gráfica, la distribución de frecuencias de la serie de preguntas que sirvió para evaluar el proceso llevado a cabo por el alumno, no corresponde a respuestas dadas aleatoriamente, ya que todas las frecuencias están sobre el 50 por ciento. Esto nos sugiere que debemos desechar la hipótesis que consiste en suponer que el alumno respondió al azar debido a sus limitaciones para llevar a cabo una deducción. Creemos necesario refinar esta interpretación y lo conseguiremos del siguiente modo: si suponemos que todos los alumnos contestaron al azar y consideramos cada respuesta de la evaluación como un valor independiente de una colección de datos aleatorios, tendremos en total 1000 valores (100 alumnos de la muestra x 10 preguntas del examen) y una manera mediante la cual contrastar la hipótesis de respuesta al azar.

Con esta hipótesis, que llamaremos hipótesis nula, H_0 , la proporción de respuestas acertadas deberá ser igualada a 0.5, pero puesto que para valores grandes de n (tamaño de la muestra) la

distribución de proporciones muestrales es aproximadamente normal, con parámetros conocidos, podemos proponer una prueba de hipótesis y para garantizar el rechazo de H_0 tomaremos un nivel de significación del 1 por ciento. Las características importantes de esta prueba se muestran en las siguientes figuras:

PARAMETRO	FORMULA	VALOR CALCULADO
Media μ	$\mu = p$	0.5
Desviación Estándar σ	$\sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$	0.0158
Punto crítico \bar{P}_0	$\bar{P}_0 = \mu_{\bar{p}} \pm Z_{\alpha} \sigma_{\bar{p}}$	0.540764 0.459236



Alentados por el resultado anterior, buscamos ahondar más en las características del tipo de la hipótesis que maneja el adolescente.

Elaboramos una lista de las hipótesis que nos parecieron significativas, las jerarquizamos por su dificultad y a cada una le asociamos una frecuencia. Esta corresponde al número de diagramas que en el experimento registran al mismo

tiempo dicha hipótesis y la noción que hemos querido transmitir; es decir, en la figura de cada tarjeta aparecen simultáneamente las características que confirman esta hipótesis, y las condiciones para que el diagrama sea una suprayección. Debido al diseño del experimento ya explicado, esta frecuencia se eleva a 10, sólo en el caso de la hipótesis de suprayección. Se utilizó como criterio para una primera selección la frecuencia asociada. Fue posible reducir una lista de 230 hipótesis factibles¹ a sólo 55, por una inspección de la frecuencia.

Posteriormente, una nueva frecuencia se asignó con un criterio más rígido a las 55 hipótesis que quedaron de la primera selección. Para esto se hizo un análisis de las preguntas que en el examen debían ser contestadas de modo afirmativo, para garantizar la consistencia con una hipótesis determinada y comparadas en un tiempo posterior con el registro que aparece en la evaluación. Así disponemos de dos elementos importantes para caracterizar una hipótesis: el número de aciertos en la evaluación y el orden de las preguntas en las que deben registrarse errores por incompatibilidad con la hipótesis de suprayección. La nueva frecuencia es, por lo tanto, el número de alumnos que en la muestra y según los criterios anteriores parecen responder con el apoyo de una hipótesis dada. La distribución de frecuencias correspondientes se muestra en la siguiente tabla:

FORMA GENERAL DE LA HIPOTESIS		No. DE PREGUNTAS DONDE HAY ERROR	No. DE ACIERTOS	FRECUENCIA	N
PROPIEDADES PRESENTES	FACTORES AUSENTES				
1	0	3,7,8	7	0	
2	0	7,10	8	0	
3	0	6,8	8	1	
0	7	7,10	8	0	
12	0	7	9	1	
13	0	8	9	12	
23	0	9	9	0	
29	0	2,4,7	7	1	
39	0	2,4,6,8	6	0	
123	0	0	10	3	
129	0	2,4,7	7	1	
139	0	2,4,8	7	0	
239	0	2,4	8	0	
3	7	0	10	3	
3	6,6,7	0	10	3	
13	7	5	9	1	
1	4,6,7	7,8	8	3	
1	5,6,7	7,8	8	3	
1	6,6,7	3,7	8	0	
1	7,6,8	3,7	8	0	
1	7	7	9	1	
1	7,6,9	7	9	1	
3	4,6,7	6,8	8	1	
3	7,6,8	6,8	8	1	
3	7,6,9	6,8	8	1	
3	5,6,7	8	9	12	
1	4,7	1,2,9	7	0	
1	7,8	1,4,5,7	6	0	
3	6,7	4,9	8	0	
3	7,8	1,2,4,5	6	0	
1	4,6,5	2,8	8	0	
2	4,6,7	7,10	8	0	
2	5,6,7	7,10	8	0	
2	6,6,7	7,10	8	0	
2	7,6,8	7,10	8	0	
2	7,6,9	7,10	8	0	
1	4,6,6	3,8,9	7	0	
1	4,6,8	1,2,3,7,8	5	0	
1	4,6,9	1,8,9	7	0	
1	5,6,6	3,4,8	7	0	
1	5,6,8	2,3,4,5,7,8	4	1	
1	6,6,8	3,4,7	7	0	
1	8,6,9	1,3,5,7	6	0	
2	4,6,5	2,10	8	0	
2	4,6,6	9	9	0	
2	4,6,8	1,2,7	7	1	
2	5,6,6	4,10	8	0	
2	5,6,8	2,4,5,7,10	5	0	
2	6,6,8	4,7	8	0	
2	8,6,9	1,5,7,10	6	1	
3	4,6,5	2,6,8	7	0	
3	4,6,6	6,8,9	7	1	
3	5,6,6	4,8	8	2	
3	5,6,8	2,4,5,6,8	5	0	
3	6,6,8	4,6	8	0	

Después de este análisis sólo ha sido posible identificar 28 casos, aunque no totalmente. La situación se describe en la siguiente distribución.

NUMERO DE ACIERTOS	PREGUNTAS EN LAS QUE HAY ERROR	FRECUENCIA	FORMA GENERAL DE LA HIPOTESIS	
			FACTORES PRESENTES	FACTORES AUSENTES
10	0	3	123	0
			3	7
			3	6 ó 7
			13	0
9	8	12	3	5 ó 7
			12	0
9	7	1	1	7
			1	7 ó 8
9	5	1	13	7
			1	4 ó 7
8	7,8	3	1	5 ó 7
			3	0
8	4,8	2	3	4 ó 7
			3	7 ó 8
			3	7 ó 9
8	4,8	2	3	5 ó 6
			29	0
7	2,4,7	1	029	0
			2	4 ó 8
7	1,2,7	1	3	4 ó 6
7	6,8,9	1	2	8 ó 9
4	2,3,4,5,7,8	1	1	5 ó 8

De lo anterior resulta evidente que para conseguir una comprensión completa de la forma de pensar del alumno es conveniente un estudio más detallado y un mejoramiento de las condiciones en las cuales se lleva a cabo el experimento, así como también una revisión del tipo de información que es posible conseguir y la forma de organizarla.

Conclusiones

Podemos deducir algunas conclusiones importantes de lo anterior.

1. El estudiante del bachillerato es capaz de elaborar una hipótesis para usarla como un instrumento útil.
2. El rechazo de la hipótesis nula nos inclina a creer que la forma en que el alumno común elabora una hipótesis y la forma en que la utiliza es bastante inmadura (la inmadurez entendida no como falta de recursos intelectuales, sino como recursos aprovechados de manera ineficiente). Ya que sólo 28 casos fueron consistentes con alguna de las hipótesis que consideramos significativas, y los 72 casos restantes con mucha probabilidad no contrastan de manera completa la información recibida con la hipótesis que elaboraron, nos inclinamos a creer que el proceso es muy corto para la mayoría y por lo tanto insuficiente para rectificar su hipótesis.
3. Como consecuencia de las afirmaciones anteriores, el diseño de las experiencias de aprendizaje deberá orientar convenientemente los recursos intelectuales del estudiante, a fin de conseguir la madurez que es necesaria en el estudio de las Matemáticas en este nivel.

JESUS AGUILERA GARCIA
 HERIBERTO MORALES GOMEZ
 Plantel Azcapotzalco

ANEXO

Las tarjetas del experimento se presentan en la siguiente figura.

